1 Análisis Multivariado I - Práctica 1 - Parte 2

1.1 Distribución Wishart

En los ejercicios siguientes supondremos que $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}_d\,(m, \boldsymbol{\Sigma}) = \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}, d, m)$.

1. Probar que $\mathbb{E}\,(\mathbf{W}) = m\boldsymbol{\Sigma}$.

   (a) Si $\mathbf{b}$ de $d \times 1$ es un vector de constantes, $(\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{b})\,/\,(\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{b}) \sim \chi^2_m$.

   (b) En particular, si $\mathbf{b} = \mathbf{e}_j$ el j-ésimo vector de la base canónica, resulta $w_{jj}/\sigma_{jj} \sim \chi^2_m$.

2. Si $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q\times d}$es una matriz no aleatoria de rango q, entonces $\mathbf{C}\,\mathbf{W}\,\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \sim \mathcal{W}_q\,(m, \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})\,.$

3. Realicemos la siguiente partición de las matrices $\mathbf{W}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$$

   con $\mathbf{W}_{11}$ y $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ cuadradas y de la misma dimensión.

   Si $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{W}_{11}$ y $\mathbf{W}_{22}$ tienen distribución Wishart y son independientes. Hallar los parámetros correspondientes.

4. Si $m \geq p$ y $\det(\boldsymbol{\Sigma}) \neq 0$ entonces $\mathbb{P}\,(\det(\mathbf{W}) \neq 0) = 1$.

5. Si $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ son independientes y $\mathbf{W}_i \sim \mathcal{W}_d\,(m_i, \boldsymbol{\Sigma})\,$, entonces $\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2 \sim \mathcal{W}_d\,(m_1 + m_2, \boldsymbol{\Sigma})$.

6. (a) En `R`, fijar la semilla y generar una matriz aleatoria $\mathbf{W}$ con distribución $\mathcal{W}_3(20, \mathbf{I}_3)$.

   (b) Fijada la semilla, generar 100 matrices aleatorias $\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_{100}$ y calcularles el promedio $\overline{\mathbf{W}}_{100}$. ¿A qué matriz debería parecerse $\overline{\mathbf{W}}_{100}$?

1.2 Distribución Hotelling

1. Sea $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ independiente de $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}_p(m, \boldsymbol{\Sigma})$, indiquemos por $\mathcal{H}(p, m, \lambda^2)$ la distribución de

$$n\,\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{x}\,,$$

   donde $\lambda^2 = \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$.

   Armar en `R` una función que calcule el valor de la densidad de una Hotelling no central $\mathcal{H}(p, m, \lambda^2)$ en función de la densidad de una distribución $\mathcal{F}_{p,m-p+1}(\lambda^2)$.

2. En lo que sigue realizaremos un pequeño estudio de simulación para aproximar las distribuciones Hotelling central y Hotelling no central.

   (a) i. Fijar la semilla.

      ii. Generar NITER $= 1000$ variables aleatorias con distribución Hotelling central $\mathcal{H}(3, 20)$ a partir de $\mathbf{x} \sim N_3(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ y $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}_3(20, \mathbf{\Sigma})$ independientes con

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

      iii. Realizar un histograma de los valores observados y superponerle un estimador de la función de densidad. Utilizar la instrucción `density` para obtener un estimador de la densidad basado en núcleos.

      iv. En otro gráfico, comparar el estimador de basado en núcleos con la verdadera función de densidad utilizando la función del Ejercicio 1.

   (b) Repetir (i)$-$(iv) para generar una Hotelling no central a partir de $\mathbf{x} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ y $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}_3(20, \mathbf{\Sigma})$ independientes con

      - $\boldsymbol{\mu} = (-1, 2, -3)^{\mathrm{T}}$ y
      - $\mathbf{\Sigma}$ la matriz dada en (1).